

# Axialsymmetrische Lösungen der magnetohydrostatischen Gleichung mit Oberflächenströmen II

Von K. JÖRGENS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforschg. 13 a, 493—498 [1958]; eingegangen am 2. April 1958)

Axially symmetric magneto-hydrodynamic equilibrium configurations are considered where the plasma is contained in a torus of arbitrary cross-section and electric currents flow in the surface of the plasma only. It is shown that the magnetic field is uniquely determined by the values of the total current in azimuthal and in meridional direction respectively and by the gas pressure. A method is given to compute the location of discontinuities of the magnetic field outside of the torus. The singularities are found explicitly in the case of elliptic or circular cross-section. In the circular case only the magnetic field is regular everywhere outside except on the axis of symmetry.

Die magnetohydrostatische Gleichung

$$\frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}, \text{rot } \mathfrak{B}] + \text{grad } p = 0 \quad (1)$$

ist eine notwendige Bedingung für das Gleichgewicht eines ruhenden Plasmas mit Gasdruck  $p$  in einem Magnetfeld  $\mathfrak{B}$ . Die einfachsten Lösungen dieser Gleichung sind die, welche Plasma-Konfigurationen mit Oberflächenströmen beschreiben. Für diese Lösungen gilt

$$\mathfrak{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathfrak{B} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad (3)$$

überall im Innern und natürlich auch außerhalb des Plasmas, so daß der Druck  $p$  innen und außen je einen konstanten Wert haben muß. Der nichtlineare Charakter der Gl. (1) kommt dabei nur in den Übergangsbedingungen zum Ausdruck, die sich aus (1) und (3) durch Grenzübergang zum Oberflächenstrom ergeben:

$$(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{n}) = 0, \quad (4a) \quad (\mathfrak{B}_a, \mathfrak{n}) = 0, \quad (4b)$$

$$p + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{B}_i^2 - \mathfrak{B}_a^2) = 0. \quad (4c)$$

Hierin sind mit  $\mathfrak{B}_i$  bzw.  $\mathfrak{B}_a$  der innere bzw. der äußere Grenzwert von  $\mathfrak{B}$  auf der Oberfläche bezeichnet.  $\mathfrak{n}$  ist die äußere Normale der Fläche. Der Druck außerhalb des Plasmas ist gleich Null gesetzt. Die Übergangsbedingungen besagen, daß die magnetischen Feldlinien innen sowohl als außen in der Oberfläche des Plasmas verlaufen und daß das Quadrat des Betrages der Feldstärke außen um  $8\pi p$  größer ist als innen. Dieser Unstetigkeit der Feldstärke entspricht ein Oberflächenstrom mit der Flächendichte

$$\mathfrak{j}^* = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_a - \mathfrak{B}_i]. \quad (5)$$

Nimmt man die Oberfläche  $\mathfrak{F}$  des Plasmas, den Druck  $p$  und das Innenfeld als gegeben an, so ist die Bestimmung des Außenfeldes ein Problem der Potentialtheorie, das wegen der zwei auf  $\mathfrak{F}$  vorgeschriebenen Randbedingungen (4b) und (4c) sowie wegen des mehrfachen Zusammenhanges des Gebietes vom Üblichen abweicht. Die Lösung dieses Problems läßt sich daher nicht mit geläufigen Hilfsmitteln der Potentialtheorie durchführen, und es ist im allgemeinen nicht einmal zu erwarten, daß eine im ganzen Außengebiet reguläre Lösung überhaupt existiert. Indessen ist von KIPPENHAHN<sup>1</sup> gezeigt worden, daß für geschlossene *analytische* Flächen  $\mathfrak{F}$  eine Lösung „im Kleinen“, d. h. in der Nachbarschaft der Fläche, mit Hilfe von Potenzreihen gefunden werden kann, falls eine im allgemeinen mehrdeutige analytische Funktion  $\Phi$  mit eindeutigem Gradienten auf der Fläche existiert derart, daß  $|\text{grad } \Phi|^2 = p + (1/8\pi) \mathfrak{B}_i^2$  ist.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der Untersuchungen von BIERMANN, HAIN, LÜST und JÖRGENS<sup>2</sup> über den axialsymmetrischen Spezialfall des beschriebenen Problems. Es wird angenommen, daß das Plasma das Innere einer torusartigen axialsymmetrischen Fläche erfüllt, die, in Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$ , durch ihre Meridiankurve in der  $rz$ -Ebene beschrieben wird. Das Innenfeld ist dann rein azimuthal und vom Betrage  $T_i/r$  ( $T_i$  eine Konstante). In diesem Fall gibt es nach KIPPENHAHN unendlich viele Lösungen des Problems, die durch die Konstante  $T_a$  in der Azimutalkomponente  $T_a/r$  des Außenfeldes festgelegt sind. In I ist u. a. die Lösung für den Kreistorus mit  $T_i = T_a = 0$  durch eine Reihenentwicklung angegeben worden. Im folgenden wer-

<sup>1</sup> R. KIPPENHAHN, Z. Naturforschg. 13 a, 260 [1958].

<sup>2</sup> L. BIERMANN, K. HAIN, K. JÖRGENS u. R. LÜST, Z. Naturforschg. 12 a, 826 [1957], im folgenden als I zitiert.



den ähnliche Darstellungen für beliebigen Querschnitt und auch für nicht verschwindende Azimutalkomponente gewonnen. Es wird sodann eine Methode zur Bestimmung der Singularitäten des Außenfeldes, und damit des Existenzgebietes der Lösung, angegeben. Diese Methode wird auf den kreisförmigen und den elliptischen Querschnitt angewendet. Es zeigt sich, daß beim Kreistorus die Lösung im ganzen Raum mit Ausnahme der Symmetrieachse regulär ist, falls  $|T_i| \geq |T_a|$  gilt, d. h. falls die Azimutalkomponente des Feldes innen nicht kleiner als außen ist. Anderenfalls kann die Lösung eine Verzweigung auf einer Kreislinie im Außenraum haben, welche axialsymmetrisch liegt. Bei elliptischem Querschnitt treten solche Verzweigungen stets auf. Die Lage dieser Singularitäten gibt einen Hinweis darauf, in welchem Abstand vom Torus die das Magnetfeld erzeugenden Leiter anzubringen sind.

### Der Lösungsansatz

Ein geeigneter Ansatz zur Lösung der Gln. (2) und (3) im axialsymmetrischen Falle ist (in Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$ ) \*:

$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{F_z}{r}, \frac{T}{r}, -\frac{F_r}{r} \right\} \quad (6)$$

mit der Flußfunktion  $F = F(r, z)$  und einer Konstanten  $T$ , welche jedoch für den Innenraum des Torus und für den Außenraum im allgemeinen verschieden zu wählen ist. Diese Konstanten sind im folgenden mit  $T_i$  bzw.  $T_a$  bezeichnet. Der Ansatz (6) ist eine Verallgemeinerung des STOKESSchen Ansatzes für axialsymmetrische Strömungen, welche von LÜST und SCHLÜTER<sup>3</sup> zur Berechnung von kraftfreien Magnetfeldern und auf Gl. (1) angewandt worden ist. Es ist leicht einzusehen, daß alle axialsymmetrischen Lösungen von (2) und (3) diese Form haben. Während (3) von vornherein durch den Ansatz erfüllt ist, führt (2) auf die Differentialgleichung von STOKES

$$F_{rr} - \frac{1}{r} F_r + F_{zz} = 0. \quad (7)$$

Die Oberfläche  $\mathfrak{S}$  des Plasmas ist durch ihre Schnittkurve  $\mathfrak{C}$  (Meridiankurve) mit der  $r, z$ -Ebene bestimmt; diese sei doppeltpunktfrei und durch zwei analytische  $2\pi$ -periodische Funktionen  $r(t), z(t)$  dargestellt

\*  $F_r = \partial F / \partial r, F_z = \partial F / \partial z$ .

<sup>3</sup> R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Astrophys. **38**, 190 [1955] und Z. Naturforschg. **12a**, 850 [1957].

$$\mathfrak{C}: r = r(t), z = z(t),$$

$$\dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t) > 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (8)$$

Die Flußfunktion  $F$  muß auf  $\mathfrak{C}$  eine Reihe von Randbedingungen erfüllen, welche den Randbedingungen (4a) bis (4c) für  $\mathfrak{B}$  äquivalent sind. Zunächst ist aus dem Ansatz (6) plausibel, daß  $F(r, z)$  auf  $\mathfrak{C}$  stetig ist, während die ersten Ableitungen endliche Sprungunstetigkeiten haben. Da die magnetischen Feldlinien in den axialsymmetrischen Flächen  $F = \text{const}$  im Raume verlaufen, muß die Oberfläche  $\mathfrak{S}$  gemäß den Randbedingungen (4a) und (4b) selbst eine solche Fläche, z. B. die Fläche  $F = 0$  sein.

$$F[r(t), z(t)] = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (9)$$

Hieraus und aus der Differentialgl. (7) folgt bereits, daß  $F$  innerhalb von  $\mathfrak{C}$  identisch verschwindet, so daß das Innenfeld von der Form

$$\mathfrak{B} = \{0, T_i/r, 0\} \quad (10)$$

ist. Die Randbedingung (4c) geht damit über in

$$\mathfrak{B}_a^2 = \frac{1}{r^2} |\text{grad } F|^2 + \frac{T_a^2}{r^2} = 8\pi p + \frac{T_i^2}{r^2}.$$

Hieraus folgt wegen (9) als Randbedingung für  $F(r, z)$

$$\frac{\partial F}{\partial n} [r(t), z(t)] = r(t) \left\{ 8\pi p + \frac{T_i^2 - T_a^2}{r^2(t)} \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$\partial F / \partial n$  bezeichnet die äußere Normalableitung von  $F$  auf  $\mathfrak{C}$ ; die innere Normalableitung ist Null gemäß (10). Die Konstante  $T_a$  ist frei wählbar, jedoch so, daß der Radikand in (11) stets positiv ist; das Vorzeichen der Wurzel legt den Richtungssinn des meridionalen Anteils  $\mathfrak{B}_{\text{mer}}$  des Außenfeldes fest. Die Orientierung geht aus Abb. 1 hervor. Der Zusammenhang zwischen den Konstanten  $p, T_i, T_a$  und den Oberflächenströmen ergibt sich aus (5). Man findet für die Komponenten der Stromdichte

$$j_{az}^* = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial n},$$

$$j_{\text{mer}}^* = \frac{c}{4\pi} \frac{T_a - T_i}{r},$$

und daraus die Komponenten des Gesamtstromes

$$J_{az} = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( 8\pi p + \frac{T_i^2 - T_a^2}{r^2(t)} \right) [\dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t)] \right\}^{1/2} dt, \quad (12a)$$

$$J_{\text{mer}} = \frac{c}{2} (T_a - T_i). \quad (12b)$$

An Stelle von  $p$ ,  $T_i$  und  $T_a$  können also auch die Konstanten  $p$ ,  $J_{az}$  und  $J_{mer}$  vorgegeben werden. Offenbar ist stets  $J_{az} \neq 0$ , was auch in I schon festgestellt worden war.

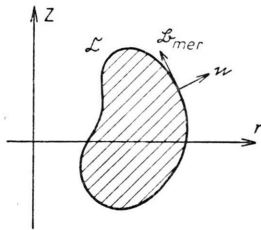


Abb. 1. Die Azimutalkomponente weist in die Zeichenebene hinein.

### Lösung des Randwertproblems

Es soll nun gezeigt werden, daß es nach Wahl der Konstanten  $p$ ,  $T_i$  und  $T_a$  genau eine Lösung der STOKESSCHEN Differentialgl. (7) gibt, die außerhalb und in der Nähe der Kurve  $\mathcal{C}$  regulär ist und auf  $\mathcal{C}$  den beiden Randbedingungen (9) und (11) genügt. Durch die Substitution

$$F(r, z) = \sqrt{r} u(r, z) \quad (13)$$

wird (7) übergeführt in die Differentialgleichung

$$u_{rr} + u_{zz} - \frac{3}{4r^2} u = 0, \quad (14)$$

deren Grundlösung sich wie folgt angeben läßt<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \Gamma(r, z; \varrho, \zeta) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{r\varrho} \int_0^\pi \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 + (z - \zeta)^2 - 2r\varrho \cos \vartheta}} \quad (15a) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \{ (2 - k^2) K(k) - 2 E(k) \} \quad (15b)$$

mit 
$$k^2 = \frac{4r\varrho}{(r+\varrho)^2 + (z-\zeta)^2} \leq 1.$$

Hierin sind  $K(k)$  bzw.  $E(k)$  die vollständigen elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Gattung. Aus (15b) und den bekannten Eigenschaften der elliptischen Integrale entnimmt man, daß die Grundlösung  $\Gamma$  sich für  $r \rightarrow \varrho$ ,  $z \rightarrow \zeta$ , also für  $k \rightarrow 1$  wie

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(r-\varrho)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

verhält, d. h. wie die Grundlösung der LAPLACESCHEN Gleichung. Daraus folgt, daß die Funktion

$$\Phi(r, z) = -\sqrt{r} \int_0^{2\pi} \Gamma[r, z; r(t), z(t)] f(t) \, dt \quad (16)$$

mit

$$f(t) = \left\{ r(t) \left( 8\pi p + \frac{T_i^2 - T_a^2}{r^2(t)} \right) [\dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t)] \right\}^{1/2} \quad (17)$$

eine in der ganzen Halbebene definierte Lösung von (7) ist, die durch die Kurve  $\mathcal{C}$  stetig aber mit einem Sprung der Normalableitung hindurchgeht und sonst regulär ist. Man findet

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\text{außen}} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\text{innen}} = \sqrt{r(t)} f(t) \{ \dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t) \}^{-1/2},$$

d. h. der Sprung ist gerade der durch die Randbedingung (11) geforderte. Die Randbedingung (9), welche besagt, daß die Lösung  $F(r, z)$  auf dem Rande verschwinden soll, ist jedoch nicht erfüllt. Die gesuchte Lösung  $F$  erhält man nun offenbar dadurch, daß man von  $\Phi$  eine andere Lösung  $\Psi$  subtrahiert, die innerhalb von  $\mathcal{C}$  mit  $\Phi$  übereinstimmt, die aber durch  $\mathcal{C}$  regulär hindurchgeht<sup>5</sup>:

$$F(r, z) = \Phi(r, z) - \Psi(r, z). \quad (18)$$

In den folgenden Kapiteln wird gezeigt werden, daß  $\Phi(r, z)$  dank dem analytischen Charakter der Kurve  $\mathcal{C}$ , und damit der Funktion  $f(t)$  (17), über  $\mathcal{C}$  hinaus analytisch fortgesetzt werden kann. Die so erhaltene Funktion  $\Psi(r, z)$  ist auch außerhalb von  $\mathcal{C}$  Lösung der STOKESSCHEN Differentialgleichung, stimmt dort aber nicht mehr mit  $\Phi$  überein; ihr Regularitätsgebiet ist zugleich gemäß (18) das Regularitätsgebiet der Lösung  $F(z, r)$ . Um zu zeigen, daß nur diese eine Lösung des Problems existiert, bildet man die Differenz zweier Lösungen; dies ist dann eine Lösung von (7), die auf  $\mathcal{C}$  samt ihrer Normalableitung Null ist. Eine solche Funktion ist aber identisch Null.

Ein Beweis dieser physikalisch naheliegenden Behauptung kann mit Hilfe des Analytizitätstheorems für elliptische Differentialgleichungen erbracht werden. Neuerdings ist ein direkter Beweis gelungen<sup>6</sup>.

### Entwicklung nach Torusfunktionen

Die Differentialgleichung  $u_{rr} + u_{zz} - (3/4r^2)u = 0$ , deren Zusammenhang mit der STOKESSCHEN Differentialgleichung durch (13) gegeben ist, läßt sich in Bipolarkoordinaten  $\xi, \eta$  separieren. Setzt man

$$r = \frac{a \sin \eta}{\cos \eta - \cos \xi}, \quad z = b + \frac{a \sin \xi}{\cos \eta - \cos \xi}, \quad (19)$$

<sup>4</sup> Vgl. C. MAXWELL, A Treatise on Electricity and Magnetism, 3. ed. Vol. II., 339–347 (1892).

<sup>5</sup> Vgl. das analoge Verfahren in I.

<sup>6</sup> C. MÜLLER, Comm. Pure Appl. Math. 7, 505 [1954].

so geht die Differentialgleichung über in

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{3}{4 \sin^2 \eta} u = 0$$

und hat daher die Lösungen

$$e^{in\xi} q_n(\eta) = e^{in\xi} \sqrt{\sin \eta} \mathfrak{Q}_{n-1/2}^1(\cos \eta), \quad (20 a)$$

$$e^{in\xi} p_n(\eta) = e^{in\xi} \sqrt{\sin \eta} \mathfrak{P}_{n-1/2}^1(\cos \eta), \quad (20 b)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hierin sind  $\mathfrak{Q}_{n-1/2}^1(\cos \eta)$ ,  $\mathfrak{P}_{n-1/2}^1(\cos \eta)$  die sog. Torusfunktionen<sup>7</sup>. Durch die Abbildung (19) werden die Geraden  $\eta = \text{const}$ ,  $0 \leq \xi \leq 2\pi$  in Kreise mit dem Mittelpunkt  $r = a(\cos \eta / \sin \eta)$ ,  $z = b$  und dem Radius  $R = a / \sin \eta$  übergeführt, die sich für  $\eta \rightarrow \infty$  auf den Punkt  $r = a$ ,  $z = b$ , das Zentrum des Koordinatensystems, zusammenziehen. Diese Kreise sollen Kreise „um“ den Punkt  $r = a$ ,  $z = b$  genannt werden. Das Verhalten der Torusfunktionen bei  $\eta \rightarrow \infty$ <sup>7</sup> zeigt, daß die Lösungen (20 a) sich in der Nähe des Zentrums regulär, nämlich wie

$$\text{const} \cdot \{(r-a) \pm i(z-b)\}^{|n|}$$

verhalten, während die Lösungen (20 b) dort unendlich werden. Es gilt nun der folgende Entwicklungssatz:

*Es sei  $u(r, z)$  eine reelle, in einer Umgebung des Punktes  $r = a$ ,  $z = b$  reguläre (d. h. zweimal stetig differenzierbare) Lösung der Differentialgleichung  $u_{rr} + u_{zz} - (3/4 r^2) u = 0$ . Dann gilt in Bipolarkoordinaten*

$$u(r, z) = \int_{\varrho, \zeta \in C} \left\{ \Gamma(r, z; \varrho, \zeta) \frac{\partial u}{\partial n}(\varrho, \zeta) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(r, z; \varrho, \zeta) u(\varrho, \zeta) \right\} ds, \quad (23 a)$$

die für jede innerhalb und auf der Kurve C reguläre Lösung  $u$  gilt. Die Grundlösung  $\Gamma$ , welche durch (15) definiert worden war, hat in Bipolarkoordinaten  $r, z \rightarrow \xi, \eta$ ;  $\varrho, \zeta \rightarrow \xi', \eta'$  die Entwicklung

$$\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in(\xi-\xi')}}{n^2 - \frac{1}{4}} q_n(\eta) p_n(\eta'), \quad \eta > \eta'. \quad (23 b)$$

Wählt man nun als Kurve C in der Darstellungsformel einen Kreis  $\eta = \eta_1$  im Regularitätsgebiet von  $u$  und setzt (23) ein, so folgt die Entwicklung (21). Es gilt  $q_{-n}(\eta) = q_n(\eta)$  und  $p_{-n}(\eta) = p_n(\eta)$  und daher  $a_{-n} = a_n$ . Die Konvergenz der Reihe (und

dinaten  $\xi, \eta$  mit Zentrum  $r = a$ ,  $z = b$  die Entwicklung

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\xi} q_n(\eta), \quad a_{-n} = a_n. \quad (21)$$

Die Reihe konvergiert, samt den durch gliedweise Differentiation gebildeten Reihen, im Innern des größten Kreises um das Zentrum, in dem  $u$  noch regulär ist, und divergiert außerhalb. Ist  $\eta = \eta_0$  die Gleichung des Konvergenzkreises, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{\eta_0}. \quad (22)$$

Umgekehrt stellt jede solche Reihe eine im Innern des Konvergenzkreises reguläre Lösung der Differentialgleichung dar.

Dieser Satz steht in Analogie zu dem bekannten Entwicklungssatz der Potentialtheorie. Das vorliegende Kapitel behandelt sozusagen eine Potentialtheorie in der POINCARÉschen Halbebene der hyperbolischen Geometrie mit der Metrik  $ds^2 = (dr^2 + dz^2)/r^2$ , die sich allgemein für die Diff.-Gln.  $u_{rr} + u_{zz} - (c^2/r^2) u = 0$  aufstellen läßt. Ein Kreis „um“ einen Punkt P ist der nichteuklidische Kreis mit Mittelpunkt P, d. h. der Ort aller Punkte Q mit fester nichteuklidischer Entfernung  $E(P, Q)$  von P. In der Tat findet man leicht

$$E(P, Q) = \log \frac{1 + e^{-\eta_0}}{1 - e^{-\eta_0}}$$

für alle Punkte Q des Kreises  $\eta = \eta_0$  um das Zentrum P.

Zum Beweis des Entwicklungssatzes dient die Darstellungsformel (GREENScher Satz):

an Stelle von  $\eta_0$  entnimmt man aus den asymptotischen Formeln

$$q_n(\eta) = -\sqrt{\frac{\pi |n|}{2}} e^{-|n|\eta} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|n|}\right) \right\}, \quad (24 a)$$

$$p_n(\eta) = \sqrt{\frac{|n|}{2\pi}} e^{|n|\eta} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|n|}\right) \right\}, \quad (24 b)$$

ihrer Ableitungen) sowie die Formel (22) mit  $\eta_1$  für  $|n| \rightarrow \infty$ , die aus den Integraldarstellungen der Torusfunktionen<sup>8</sup> durch eine Transformation der Integrationsvariablen und Anwendung des WATSONschen Lemmas<sup>9</sup> gewonnen sind; darin bedeutet

<sup>7</sup> Vgl. W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik,

2. Auflage, Kap. IV, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948.

<sup>8</sup> W. MAGNUS u. F. OBERHETTINGER, l. c. <sup>7</sup>, S. 96.



$O\left(\frac{1}{|n|}\right)$  einen Term, welcher kleiner ist als  $\frac{\text{const}}{|n|}$ . Die Formeln (24) und die durch formales Differenzieren daraus entstehenden gelten gleichmäßig in  $\eta$  überall dort, wo  $\sin \eta \neq 0$  ist. Läßt man nun die oben definierte Zahl  $\eta_1$ , welche größer als  $\eta_0$  und sonst beliebig war, gegen  $\eta_0$  streben, so ist der Beweis vollständig.

### Bestimmung des Regularitätsgebietes

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, die analytische Fortsetzung der früher definierten Funktion  $\Phi(r, z)$  (16) über die Meridiankurve  $\mathfrak{C}$  hinaus durchzuführen und damit das Regularitätsgebiet der Lösung  $F(r, z)$  (18) des Randwertproblems zu bestimmen. Das Zentrum  $r=a$ ,  $z=b$  eines Bipolarkoordinatensystems  $\xi, \eta$  sei im Innern der Kurve  $\mathfrak{C}$  gelegen; der Kreis  $\eta=\eta_0$  um das Zentrum sei ganz im Innern von  $\mathfrak{C}$  enthalten. Für  $\eta > \eta_0$  kann man dann die Entwicklung (23 b) in (16) einsetzen und erhält

$$\Phi = \left\{ \frac{a \sin \eta}{\cos \eta - \cos \xi} \right\}^{1/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\xi} q_n(\eta) \quad (25)$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi(n^2 - \frac{1}{4})} \int_0^{2\pi} e^{-in\xi(t)} p_n[\eta(t)] f(t) dt. \quad (26)$$

Hierin ist  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  die aus (8) vermöge der Abbildung (19) entstehende Darstellung der Meridiankurve  $\mathfrak{C}$ ,  $f(t)$  die durch (17) erklärte Funktion.

Nach dem im vorhergehenden Kapitel bewiesenen Entwicklungssatz stellt nun bereits die Reihe (25) die analytische Fortsetzung von  $\Phi(r, z)$  in den ganzen Konvergenzkreis dar. Dieser kann gemäß (22) aus der Formel (26) für die  $a_n$  bestimmt werden. Wegen  $a_{-n} = \bar{a}_n$  genügt es,  $n > 0$  anzunehmen.

In dem Integral (26) wird die komplexe Variable

$$w = w(t) = r(t) + iz(t) \quad (27 a)$$

als Integrationsvariable eingeführt.  $w(t)$  ist in der Nähe der reellen Achse der  $t$ -Ebene regulär analytisch und hat wegen  $|\dot{w}(t)|^2 = \dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t) > 0$  eine eindeutige Umkehrfunktion  $t = t(w)$ . Die Integration ist über  $w$  längs der Kurve  $\mathfrak{C}$  zu erstrecken. Definiert man noch die analytischen Funktionen

$$w^*(w) = r[t(w)] - iz[t(w)], \quad (27 b)$$

und  $\xi^*(w) = \xi[t(w)]$ ,  $\eta^*(w) = \eta[t(w)]$ , die gemäß (19) auch durch

$$e^{\eta^* - i\xi^*} = \frac{w + a - ib}{w - a - ib}, \quad (28 a)$$

$$e^{\eta^* + i\xi^*} = \frac{w^*(w) + a + ib}{w^*(w) - a + ib} \quad (28 b)$$

erklärt werden können, so folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi(n^2 - \frac{1}{4})} \int_{\mathfrak{C}} e^{-in\xi^*(w)} p_n[\eta^*(w)] g(w) dw \quad (29)$$

$$\text{mit } g(w) = f[t(w)] \frac{dt(w)}{dw} = \left\{ \left( 8\pi p \frac{w + w^*(w)}{2} + 2 \frac{T_1^2 - T_a^2}{w + w^*(w)} \right) \frac{dw^*(w)}{dw} \right\}^{1/2}. \quad (30)$$

Nun kann man, wegen des CAUCHYSCHEN Satzes, den Integrationsweg in (29) in das Gebiet außerhalb der Kurve  $\mathfrak{C}$  verlegen, ohne den Wert des Integrales zu ändern, wenn nur der neue Integrationsweg  $\mathfrak{C}'$  innerhalb des Regularitätsgebietes der Funktionen  $g(w)$ ,  $e^{-i\xi^*(w)}$  und  $p_n[\eta^*(w)]$  bleibt; insbesondere muß auf  $\mathfrak{C}'$   $\sin \eta^*(w) \neq 0$  sein, so daß die asymptotische Formel (24 b) gültig ist. Einsetzen von (24 b) und (28 a) ergibt

$$|a_n| = \frac{1 + O(1/n)}{(2\pi n)^{3/2}} \int_{\mathfrak{C}'} \left| \frac{w + a - ib}{w - a - ib} \right|^n |g(w)| |dw|$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $\eta = \eta_0$  ein Kreis um das Zentrum  $r=a$ ,  $z=b$ , der ganz im Innern von  $\mathfrak{C}'$  liegt. Aus (28 a) folgt, daß dann der Integrand auf  $\mathfrak{C}'$  überall kleiner ist als  $e^{n\eta_0} |g(w)|$ . Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{\eta_0}$$

und die Reihe (25) konvergiert in dem genannten Kreise. Dies gilt zunächst nur, wenn das Zentrum  $r=a$ ,  $z=b$  innerhalb von  $\mathfrak{C}$  liegt.

Es ist nun zu zeigen, daß die Aussage für beliebige Zentren  $a, b$  im Innern von  $\mathfrak{C}'$  richtig ist, so daß  $\Phi(r, z)$  dort überall regulär ist. Im Regularitätsgebiet von  $\Phi(r, z)$  hängen die Koeffizienten  $a_n$  analytisch von  $a$  und  $b$  ab. Dies folgt durch Anwendung der Gln. (23) auf  $\Phi$ . Andererseits sind  $e^{-i\xi^*(w)}$  und  $p_n[\eta^*(w)]$  für festes  $w$  auf  $\mathfrak{C}'$  als Funktionen von  $a$  und  $b$  im Innern von  $\mathfrak{C}'$  regulär analytisch. Dies folgt aus (28) und der Regularität von  $g(w)$ , indem man beachtet, daß  $w^*(w)$  das Äußere der Kurve  $\mathfrak{C}$  eindeutig und konform auf das Innere des Spiegelbildes von  $\mathfrak{C}$  bezüglich der reellen Achse abbildet, welches den Punkt  $-a - ib$  nicht enthält, und daß  $\sin \eta^*(w) \neq 0$  mit  $w + w^*(w) \neq 0$  äquivalent ist. Das Integral (29) ist also nach Ver-

<sup>9</sup> G. N. WATSON, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press 1922, S. 236.

legung des Integrationsweges in die Kurve  $\mathfrak{C}'$  für  $a, b$  im Innern von  $\mathfrak{C}'$  regulär analytisch und folglich gleich  $a_n$  überall dort, wo  $\Phi(r, z)$  regulär ist. Nun wiederholt man die frühere Schlußweise und zeigt damit die Regularität von  $\Phi$  in einem größeren Gebiet, schließlich im ganzen Innern von  $\mathfrak{C}'$ .

$\mathfrak{C}'$  war definiert als eine beliebige, im Regularitätsgebiet der Funktionen  $g(w)$ ,  $e^{-i\xi^*(w)}$  und  $p_n[\eta^*(w)]$  zu  $\mathfrak{C}$  homologe Kurve. Wie oben bemerkt, folgt aber die Regularität der zweiten und der dritten Funktion aus der von  $g(w)$ . Damit ist das endgültige Resultat gewonnen:

*Die Lösung  $F(r, z)$  der STOKESSchen Differentialgleichung (7), welche auf  $\mathfrak{C}$  die Randbedingungen (9) und (11) erfüllt, ist außerhalb von  $\mathfrak{C}$  überall dort regulär, wo die durch (27) und (30) definierte Funktion  $g(w)$  regulär ist.*

### Anwendung auf elliptische Querschnitte

Die Kurve  $\mathfrak{C}$  sei eine Ellipse (oder ein Kreis), dargestellt durch

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 + \alpha \cos t, & 0 < \alpha < r_0, \\ z(t) &= \beta \sin t, & \beta > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Es erweist sich als bequemer, die Singularitäten zunächst in der  $t$ -Ebene auszurechnen. Sei  $t = \tau + i\sigma$ ; dann wird durch (31) die untere Halbebene  $\sigma < 0$  auf das Äußere von  $\mathfrak{C}$  abgebildet. Da  $w(t)$  und  $w^*(t)$  ganze Funktionen sind, kommen als Singularitäten der Funktion  $g(w)$  (30) nur die Nullstellen der drei Ausdrücke

$$\frac{dw}{dt} \frac{dw^*}{dt} = \dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t), \quad (32 a)$$

$$\frac{w(t) + w^*(t)}{2} = r(t) \quad (32 b)$$

und

$$\left( \frac{w(t) + w^*(t)}{2} \right)^2 + \frac{T_i^2 - T_a^2}{8\pi p} = r^2(t) + \frac{T_i^2 - T_a^2}{8\pi p} \quad (32 c)$$

in der unteren Halbebene in Frage. Man hat dann nur noch gemäß  $w = w(t)$  die Lage dieser Stellen in der  $w$ -Ebene zu bestimmen. Der Ausdruck (32 a) führt auf die singulären Punkte

$$w = r_0 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

Ist  $\alpha > \beta$  (flacher Querschnitt), so liegen sie rechts und links, ist  $\alpha < \beta$  (hoher Querschnitt), so liegen sie über und unter der Meridiankurve in der  $r, z$ -Ebene. Für  $\beta = \alpha$ , d. h. im Falle des Kreises, sind diese Singularitäten nicht vorhanden. Der Ausdruck (32 b) hat genau eine Nullstelle in jedem Periodenstreifen in der unteren  $t$ -Halbebene, die jedoch in die linke  $w$ -Halbebene abgebildet wird und daher nicht in Betracht kommt. Dasselbe gilt für die Singularitäten von (32 c), falls  $T_i^2 - T_a^2 \geq 0$ . Ist aber  $T_i^2 - T_a^2 < 0$  und wird

$$\delta = \sqrt{\frac{T_a^2 - T_i^2}{8\pi p}} > 0$$

gesetzt, so folgt  $\delta < r_0 - \alpha$  aus (11).

Sei  $\sqrt{(r_0 - \delta)^2 - \alpha^2} > 0$ ; dann hat (32 c) in der unteren  $t$ -Halbebene eine Nullstelle, deren Bild

$$w = \delta - \sqrt{(r_0 - \delta)^2 - \alpha^2}$$

in manchen Fällen in der rechten  $w$ -Halbebene, und zwar links neben der Meridiankurve liegen wird.

Für den Kreistorus führt die beschriebene Lösungsmethode zu einfachen Reihendarstellungen der Lösung in Bipolarkoordinaten. Der Kreisquerschnitt sei dargestellt durch

$$r(t) = \frac{a \sin \eta_0}{\cos \eta_0 - \cos t}, \quad z(t) = \frac{a \sin t}{\cos \eta_0 - \cos t}.$$

Dann ist

$$F = \left\{ \frac{a \sin \eta}{\cos \eta - \cos \xi} \right\}^{1/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n e^{in\xi}}{n^2 - \frac{1}{4}} \{ p_n(\eta) q_n(\eta_0) - q_n(\eta) p_n(\eta_0) \}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \left\{ \frac{8\pi p a^3 \sin \eta_0}{(\cos \eta_0 - \cos t)^3} + \frac{a(T_i^2 - T_a^2)}{\sin \eta_0 (\cos \eta_0 - \cos t)} \right\}^{1/2} dt.$$

Für  $T_i^2 = T_a^2$  folgt insbesondere

$$a_n = -8 \sqrt{\frac{p a^3 q_n(\eta_0)}{\pi \sin \eta_0}}.$$

Diese Lösung ist der in I angegebenen äquivalent.

Der Verfasser dankt den Herren Dr. R. KIPPENHAHN und Dr. F. MEYER für Diskussionen, die diese Arbeit sehr gefördert haben.